ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE

Concours d'admission 1982

***

Programme M — MATHEMATIQUES I — CENTRE A L'ETRANGER

(2 pages dactylographiées)

N.B. Le candidat pourra utiliser tous les résultats fournis par l'énoncé, même ceux qu'il n'aura pas réussi à justifier.

PREMIERE PARTIE

I.1 - Pour tous $x \in]0,\frac{\pi}{2}]$, vérifier les inégalités :

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad \text{et} \quad x^2 - \frac{x^4}{3} < \sin^2 x < x^2$$

I.2 - Montrer qu'il existe une application continûment dérivable, ϕ , de $[0,\frac{\pi}{2}]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \quad \text{pour tout } x \in]0,\frac{\pi}{2}] \ .$$

On précisera les valeurs de $\phi(0)$ et de $\phi'(0)$.

Vérifier que : $\phi'(x) - \frac{1}{6} > 0$ pour tout $x \in]0,\frac{\pi}{2}]$, (on pourra utiliser I.1)

En déduire le sens de variation de ϕ, sa représentation graphique C (repère orthonormé), et la position de C par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

DEUXIEME PARTIE

II.1 - Soit n un entier positif.

a) Montrer qu'il existe une application continue, f_n, de $[0,\frac{\pi}{2}]$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $f_n(x) = \frac{\sin (2n+1)x}{\sin x}$ pour tout $x \in]0,\frac{\pi}{2}]$

Quelle est la valeur de $f_n(0)$?

b) Calculer l'intégrale $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx$ (on pourra former $I_{n+1} - I_n$).

II.2 - Etablir l'existence de l'intégrale impropre (ou généralisée) : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

Soit α sa valeur. Pour tout réel m, établir l'existence des intégrales impropres : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin mt}{t}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin mt \cos t}{t}\,dt$

et exprimer leurs valeurs en fonction de α et de m .

II.3 - Pour tout n entier positif on pose : $v_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,dt$

Par des intégrations par parties successives, établir une formule du type :

$$\alpha - v_n = (-1)^n \frac{4}{(2n+1)^2 \pi^2} + \int_{(2n+1)\frac{\pi}{2}}^{+\infty} g(t)\,dt,$$

où g est une fonction que l'on précisera.

.../...

En déduire qu'il existe une constante **c** telle que : $|\alpha - v_n| \sim \frac{c}{n^2}$ (quand n tend vers + ∞)

II.4 - En intégrant par parties, montrer que la suite $(I_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite que l'on précisera.
En déduire la valeur de α .

TROISIEME PARTIE

III.1 - L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}$ existe-t-elle ?

III.2 - Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ existe et qu'elle a pour valeur α .

III.3 - Pour tout n entier positif, justifier l'égalité :

$$\sin^{2n+1} t = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k . C_{2n+1}^{n-k} . \sin (2k + 1) t$$

III.4 - Pour n entier strictement positif, établir l'existence des intégrales impropres : $P_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n+1} t}{t} dt$ et $Q_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n+2} t}{t^2} dt$

Exprimer successivement P_n et Q_n en fonction de α .

En déduire : $P_n = Q_n = \frac{1.3...(2n-1)}{2.4.....(2n)} \frac{\pi}{2}$, $(n \geqslant 1)$,
(ce que l'on pourra d'abord trouver sous la forme : $P_n = Q_n = \frac{1}{2^{2n}} . C_{2n}^{n} . \frac{\pi}{2}$).

III.5 - a) Pour a > 0 et b > 0, justifier l'existence de l'intégrale impropre :
$\int_0^{+\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t} dt$ et montrer qu'elle est égale à Log $\frac{b}{a}$ (le symbole Log désignant le logarithme népérien).

b) Existence et calcul de l'intégrale impropre : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$.

c) Pour n entier strictement positif, prouver l'existence de l'intégrale impropre :

$$R_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n+1} t}{t^2} dt$$

Justifier l'égalité : $R_n = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} C_{2n+1}^{n-k} \text{ Log } (2k + 1)$

On aura intérêt à établir d'abord (à l'aide de III.3) l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n-1}^{n-k} (2k + 1) = 0$$

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail